

2016年4月12日 火曜日

問題 1. n を正の奇数, x_1, x_2, \dots, x_n を非負実数とする. このとき,

$$\min_{i=1, \dots, n} \{x_i^2 + x_{i+1}^2\} \leq \max_{j=1, \dots, n} \{2x_j x_{j+1}\}$$

が成り立つことを示せ. ただし, $x_{n+1} = x_1$ とする.

問題 2. $ABCD$ を円に内接する四角形とし, 対角線 AC, BD の交点を X とおく. 線分 CX, DX, CD の中点をそれぞれ C_1, D_1, M とおく. 直線 AD_1, BC_1 は点 Y で交わり, 直線 MY は対角線 AC, BD とそれぞれ異なる点 E, F で交わるとする. このとき, 直線 XY は E, F, X を通る円に接することを示せ.

問題 3. m を正の整数とする. $4m \times 4m$ のマス目がある. 2つの異なるマスが仲間であるとは, 同じ行または同じ列にあることをいう. ただし, どのマスも自分自身とは仲間ではないとする. いくつかのマスに青く塗り, どのマスも少なくとも2つの青く塗られたマスと仲間であるようにしたい. 青く塗るマスの個数としてありうる最小の値を求めよ.