martedì 12 aprile 2016

Problema 1. Sia n un intero positivo dispari e siano x_1, x_2, …, x_n numeri reali non negativi. Si dimostri che

$$\min_{i=1,\ldots,n}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1,\ldots,n}(2x_j x_{j+1}),$$

dove $x_{n+1} = x_1$.

Problema 2. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico, e sia X l'intersezione delle diagonali AC e BD. Siano C_1, D_1 ed M i punti medi dei segmenti CX, DX e CD rispettivamente. Le rette AD_1 e BC_1 si intersecano nel punto Y e la retta MY interseca le diagonali AC e BD in due punti distinti, rispettivamente E ed F. Dimostrare che la retta XY è tangente alla circonferenza che passa per E, F e X.

Problema 3. Sia m un intero positivo. Si consideri una tabella $4m \times 4m$ formata da caselle unitarie. Due caselle distinte si dicono *parenti* se si trovano sulla stessa riga o sulla stessa colonna; nessuna casella è parente di se stessa. Alcune caselle sono colorate di blu, in modo tale che ciascuna casella abbia almeno due parenti blu. Si determini il minimo numero possibile di caselle blu.

Tempo a disposizione: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti