Language: **Hungarian**

Day: **1**

2016. április 12., kedd

1. Feladat Legyen n páratlan pozitív egész. Jelöljön x_1, x_2, …, x_n nemnegatív valós számokat. Mutassuk meg, hogy

$$\min_{i=1,\ldots,n}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1,\ldots,n}(2x_j x_{j+1}),$$

teljesül, ahol $x_{n+1} = x_1$.

2. Feladat Az $ABCD$ húrnégyszögben jelölje X az AC és BD átlók metszéspontját. Legyen továbbá C_1, D_1 és M pont rendre a CX, DX és CD szakaszok felezőpontja. Az AD_1 és BC_1 egyenesek Y pontban metszik egymást, MY egyenes metszéspontja AC illetve BD átlókkal E illetve F pontok, amik nem esnek egybe. Igazoljuk hogy az XY egyenes érinti az E, F és X pontokon áthaladó kört.

3. Feladat Legyen m pozitív egész és tekintsünk egy $4m\times 4m$-es, egységnégyzetekből álló táblázatot. Ha a táblázat két különböző mezője közös sorban vagy közös oszlopban van, akkor azt mondjuk, hogy *kapcsolatban állnak*. Önmagával semelyik mező nem áll kapcsolatban. Miután néhány mezőt kékre színeztünk, teljesül, hogy minden mező legalább két kék mezővel kapcsolatban áll. Határozzuk meg a kék mezők számának minimumát.

Rendelkezésre álló idő: 4 és fél óra
Minden feladat 7 pontot ér