

יום שלישי, 12 באפריל, 2016

שאלה 1. יהא n שלם חיובי אי-זוגי, ויהיו x_1, \dots, x_n ממשיים אי-שליליים. הראי כי

$$\min_{i=1, \dots, n} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1, \dots, n} (2x_j x_{j+1})$$

באשר $x_{n+1} = x_1$.

שאלה 2. יהא $ABCD$ מרובע חסום במעגל, ותהא X נקודת החיתוך של האלכסונים AC ו- BD . יהיו D_1, C_1 ו- M אמצעי הקטעים CX, DX ו- CD , בהתאמה. הישרים AD_1 ו- BC_1 נחתכים בנקודה Y , והישר MY חותך את האלכסונים AC ו- BD בשתי נקודות שונות, E ו- F , בהתאמה. הוכיחי כי הישר XY משיק למעגל החוסם של EFX .

שאלה 3. יהא m שלם חיובי. נתבונן במעריך בגודל $4m \times 4m$, שתאיו הם ריבועי יחידה. שני תאים שונים נקראים **קשורים** זה לזה אם הם נמצאים באותה השורה או באותה העמודה. אף תא אינו קשור לעצמו. חלק מהתאים צבועים בכחול, כך שכל תא קשור לשני תאים כחולים לפחות. מצאי את המספר הקטן ביותר האפשרי של תאים כחולים.