

Πρόβλημα 1 : Ας είναι n ένας θετικός περιττός ακέραιος και ας είναι x_1, \dots, x_n μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Να δείξετε ότι

$$\min_{i=1, \dots, n} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1, \dots, n} (2x_j x_{j+1}),$$

όπου ισχύει $x_{n+1} = x_1$.

Πρόβλημα 2: Ας είναι $ABCD$ τετράπλευρο εγγράψιμο σε κύκλο, και έστω ότι οι διαγώνιοι AC και BD τέμνονται στο X . Ας είναι C_1, D_1 και M τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων CX, DX και CD αντίστοιχα. Οι ευθείες AD_1 , και BC_1 τέμνονται στο Y και η ευθεία MY τέμνει τις διαγωνίους AC και BD σε διαφορετικά σημεία E και F αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η ευθεία XY είναι εφαπτομένη του κύκλου που περνά από τα σημεία E, F και X .

Πρόβλημα 3: Ας είναι m ένας θετικός ακέραιος. Θεωρήστε την $4m \times 4m$ διάταξη από μοναδιαία τετραγωνικά κελιά. Δυο κελιά λέμε ότι σχετίζονται μεταξύ τους αν βρίσκονται στην ίδια γραμμή ή στην ίδια στήλη. Κανένα από τα κελιά δεν σχετίζεται με τον εαυτό του. Κάποια από τα κελιά χρωματίζονται μπλε, έτσι ώστε κάθε κελί να σχετίζεται με τουλάχιστον δύο μπλε κελιά. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο αριθμό από μπλε κελιά.