Language: **German**

Day: **1**

Dienstag, 12. April 2016

Aufgabe 1. Sei n eine ungerade natürliche Zahl, und seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nichtnegative reelle Zahlen. Zeige, dass

$$\min_{i=1,\ldots,n}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1,\ldots,n}(2x_j x_{j+1}),$$

wobei $x_{n+1} = x_1$.

Aufgabe 2. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck und sei X der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD. Seien C_1, D_1 und M die Mittelpunkte der Strecken CX, DX respektive CD. Sei Y der Schnittpunkt der Geraden AD_1 und BC_1. Die Gerade MY schneide die Diagonalen AC und BD in zwei verschiedenen Punkten E respektive F. Zeige, dass die Gerade XY eine Tangente des Umkreises des Dreicks EFX ist.

Aufgabe 3. Sei m eine natürliche Zahl. Betrachte ein $4m \times 4m$ Spielbrett, dessen Felder Einheitsquadrate sind. Zwei verschiedene Felder sind *befreundet*, wenn sie entweder in derselben Zeile oder in derselben Spalte sind. Kein Feld ist mit sich selbst befreundet. Einige Felder sind blau angemalt, sodass jedes Feld mit mindestens zwei blauen Feldern befreundet ist. Bestimme die Mindestanzahl blauer Felder.
(*Ein Einheitsquadrat ist ein* 1×1 *Quadrat.*)

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.