Mardi 12 avril 2016

Problème 1. Soit n un entier impair strictement positif et soient x_1, x_2, …, x_n des réels positifs ou nuls. Montrer que

$$\min_{i=1,\ldots,n}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leqslant \max_{j=1,\ldots,n}(2x_j x_{j+1}),$$

où $x_{n+1} = x_1$.

Problème 2. Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique et soit X le point d'intersection des diagonales AC et BD. Soient C_1, D_1 et M les milieux respectifs des segments $[CX]$, $[DX]$ et $[CD]$. Les droites AD_1 et BC_1 se coupent en Y, et la droite MY coupe respectivement les diagonales AC et BD en des points distincts E et F. Prouver que la droite XY est tangente au cercle circonscrit à EFX.
(*Un quadrilatère cyclique est un quadrilatère dont les quatre sommets sont cocycliques.*)

Problème 3. Soit m un entier strictement positif. Des carrés unité constituent les cases d'une grille $4m \times 4m$. Deux cases distinctes sont dites *complices* si elles sont sur la même ligne ou sur la même colonne. Aucune case n'est complice d'elle-même. Certaines cases sont coloriées en bleu de telle sorte que chaque case soit complice d'au moins deux cases bleues. Déterminer le nombre minimal de cases bleues.

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points