

Tiistaina 12. huhtikuuta 2016

**Tehtävä 1.** Olkoon  $n$  pariton positiivinen kokonaisluku, ja olkoot  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ei-negatiivisia reaali-lukuja. Osoita, että

$$\min_{i=1, \dots, n} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1, \dots, n} (2x_j x_{j+1}),$$

missä  $x_{n+1} = x_1$ .

**Tehtävä 2.** Olkoon  $ABCD$  jännelikulmio, ja leikatkaa lävistäjät  $AC$  ja  $BD$  pisteessä  $X$ . Olkoot  $C_1$  janan  $CX$  keskipiste,  $D_1$  janan  $DX$  keskipiste, ja  $M$  janan  $CD$  keskipiste. Suorat  $AD_1$  ja  $BC_1$  leikkaavat pisteessä  $Y$ , ja suora  $MY$  leikkaa lävistäjää  $AC$  pisteessä  $E$  ja lävistäjää  $BD$  pisteessä  $F$ , missä  $E$  ja  $F$  ovat eri pisteitä. Osoita, että suora  $XY$  sivuaa pisteiden  $E, F$  ja  $X$  kautta kulkevaa ympyrää.

**Tehtävä 3.** Olkoon  $m$  positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan yksikköneliön muotoisista ruuduista koostuvaa  $4m \times 4m$ -taulukkoa. Kaksi eri ruutua *liittyvät* toisiinsa, jos ne ovat samalla rivillä tai samassa sarakkeessa. Mikään ruutu ei liity itseensä. Jotkin ruudut väritetään siniseksi niin, että jokainen ruutu liittyy ainakin kahteen siniseen ruutuun. Määritä pienin mahdollinen määrä sinisiä ruutuja.