

Dinsdag 12 april 2016

Opgave 1. Zij n een oneven positief geheel getal, en laat x_1, x_2, \dots, x_n niet-negatieve reële getallen zijn. Bewijs dat

$$\min_{i=1, \dots, n} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1, \dots, n} (2x_j x_{j+1}),$$

waarbij $x_{n+1} = x_1$.

Opgave 2. Zij $ABCD$ een koordenvierhoek, en zij X het snijpunt van de diagonalen AC en BD . Laat C_1, D_1 en M de middens zijn van respectievelijk lijnstukken CX, DX en CD . De lijnen AD_1 en BC_1 snijden in Y , en lijn MY snijdt diagonalen AC en BD in respectievelijk punten E en F , met $E \neq F$. Bewijs dat de lijn XY raakt aan de cirkel door E, F en X .

Opgave 3. Zij m een positief geheel getal. Bekijk een $4m \times 4m$ -bord opgedeeld in vakjes van 1 bij 1. Van twee verschillende vakjes zeggen we dat ze *familie* van elkaar zijn als ze ofwel in dezelfde rij ofwel in dezelfde kolom zitten. Een vakje is geen familie van zichzelf. Sommige vakjes zijn blauw gekleurd, op zo'n manier dat elk vakje familie is van minstens twee blauwe vakjes. Bepaal het minimale aantal blauwe vakjes.