Вторник, 12 Април, 2016

Задача 1. Нека n е нечетно естествено число и нека x_1, x_2, $\ldots$, x_n са неотрицателни реални числа. Да се докаже, че

$$\min_{i=1,\ldots,n}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1,\ldots,n}(2x_j x_{j+1}),$$

където $x_{n+1} = x_1$.

Задача 2. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност и диагоналите му AC и BD се пресичат в точка X. Нека C_1, D_1 и M са среди съответно на отсечките CX, DX и CD. Правите AD_1 и BC_1 се пресичат в Y, а правата MY пресича диагоналите AC и BD в различни точки E и F. Да се докаже, че правата XY е допирателна към описаната окръжност за триъгълник EFX.

Задача 3. Дадено е естествено число m. Разглеждаме $4m \times 4m$ таблица от единични квадратчета. Две различни квадратчета са *асоциирани* едно с друго, ако те се намират или в един ред или в един стълб. Никое квадратче не е асоциирано със себе си. Някои от клетките са оцветени в синьо така, че всяка клетка е асоциирана с поне две сини клетки. Да се намери минималния възможен брой сини клетки.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки