Viernes 17 de abril de 2015

Problema 4. Determina si existe una sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de enteros positivos que satisface la igualdad

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

para todo entero positivo n.

Problema 5. Sean m y n enteros positivos con $m > 1$. Anastasia particiona el conjunto de enteros $1, 2, \ldots, 2m$ en m parejas. Luego Boris escoge un entero de cada pareja y suma los enteros escogidos. Demuestra que Anastasia puede elegir las parejas de manera que Boris no pueda hacer que su suma sea igual a n.

Problema 6. Sea H el ortocentro y G el gravicentro del triángulo acutángulo $\triangle ABC$, con $AB \neq AC$. La línea AG intersecta al circuncírculo de $\triangle ABC$ en A y en P. Sea P' la reflexión de P en la línea BC. Demuestra que $\angle CAB = 60°$ si y solo si $HG = GP'$.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos