Пятница, 17 апреля, 2015

Задача 4. Определите, существует ли бесконечная последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ натуральных чисел, удовлетворяющая равенству

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

для любого натурального значения n.

Задача 5. Пусть m и n являются натуральными числами, причём $m > 1$. Анастасия разбивает натуральные числа $1, 2, \ldots, 2m$ на m пар. Затем Борис выбирает по одному числу из каждой пары и находит сумму этих выбранных чисел. Докажите, что Анастасия может выбрать разбиение на пары так, что Борис не сможет сделать свою сумму равной n.

Задача 6. Пусть H — ортоцентр, а G — центр тяжести остроугольного треугольника $\triangle ABC$, причём $AB \neq AC$. Прямая AG пересекает описанную окружность $\triangle ABC$ в точках A и P. Пусть P' — отражение точки P относительно прямой BC. Докажите, что угол $\angle CAB = 60^\circ$ тогда и только тогда, когда $HG = GP'$.

Время: 4 часа и 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов