Piątek, 17. kwietnia 2015

Zadanie 4. Rozstrzygnąć, czy istnieje ciąg liczb całkowitych dodatnich $a_1, a_2, a_3, \ldots$ taki, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n spełniona jest równość

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}.$$

Zadanie 5. Niech m, n będą dodatnimi liczbami całkowitymi, przy czym $m > 1$. Anastazja dzieli liczby całkowite $1, 2, \ldots, 2m$ na m par. Następnie Borys wybiera po jednej liczbie całkowitej z każdej pary oraz oblicza sumę wybranych liczb. Udowodnić, że Anastazja może tak wybrać pary, by Borys nie mógł uzyskać sumy równej n.

Zadanie 6. Punkt H jest ortocentrum zaś punkt G środkiem ciężkości trójkąta ostrokątnego ABC w którym $AB \neq AC$. Prosta AG przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach A i P. Punkt P' jest odbiciem symetrycznym punktu P względem prostej BC. Wykazać, że $\angle CAB = 60^\circ$ wtedy i tylko wtedy, gdy $HG = GP'$.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów