2015 年 *4* 月 *17* 日 金曜日

問題 4. 正の整数からなる無限列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ であり, 任意の正の整数 n について

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

をみたすものは存在するか.

問題 5. m, n は正の整数であり, $m > 1$ をみたしている. アナスタシアは整数 $1, 2, \ldots, 2m$ を m 個のペアに分割し, そのあとボリスは各ペアから 1 個ずつ整数を選び, その総和を求める. このとき, アナスタシアはうまく分割をすることで, ボリスが総和を n にできないようにすることができることを示せ.

問題 6. ABC を $AB \neq AC$ なる鋭角三角形とする. 三角形 ABC の垂心を H, 重心を G とする. 直線 AG と三角形 ABC の外接円の交点のうち A でない方を P とし, 直線 BC について P と対称な点を P' とする. このとき, $\angle CAB = 60^\circ$ と $HG = GP'$ が同値であることを示せ.

ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

試験時間：4 時間 30 分
各問 7 点