2015. április 17. péntek

4. Feladat Döntsük el, hogy létezik-e olyan pozitív egészekből álló $a_1, a_2, a_3, \dots$ végtelen sorozat, amely teljesíti az

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

egyenlőséget minden pozitív egész n-re.

5. Feladat Legyenek m és n 1-nél nagyobb pozitív egészek. Anastasia az $1, 2, \dots, 2m$ számokat m párba rendezi, majd Boris választ minden párból egy-egy elemet, és a választott számokat összeadja. Bizonyítsuk be, hogy Anastasia kiválaszthatja a párokat olyan módon, hogy Boris nem kaphatja az általa választott számok összegeként az n számot.

6. Feladat Jelölje az $ABC_\triangle$ hegyesszögű háromszögben H a magasságpontot, G pedig a súlypontot. Tegyük fel, hogy $AB \neq AC$. Az AG egyenes az $ABC_\triangle$ körülírt körét az A és P pontokban metszi. Jelölje P' a P pont tükörképét a BC egyenesre nézve. Igazoljuk, hogy $CAB\angle = 60°$ akkor és csak akkor teljesül, ha $HG = GP'$.

Rendelkezésre álló idő: 4 és fél óra.
Minden feladat 7 pontot ér.