



EGMO | 2015
European Girls' Mathematical Olympiad
Minsk, Belarus

Language: Finnish

Day: 2

Perjantai 17. huhtikuuta 2015

Tehtävä 4. Selvitä onko olemassa ääretöntä jonoa a_1, a_2, a_3, \dots positiivisia kokonaislukuja, jolle kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n pätee yhtälö

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}.$$

Tehtävä 5. Olkoot m ja n positiivisia kokonaislukuja, joille $m > 1$. Anastasia osittaa kokonaisluvut $1, 2, \dots, 2m$ kaikkiaan m pariiksi. Sitten Boris valitsee yhden kokonaisluvun jokaisesta parista ja laskee valitsemiensa kokonaislukujen summan. Osoita, että Anastasia voi valita parit niin, että Borisin saama summa ei voi olla tasan n .

Tehtävä 6. Olkoon H teräväkärkisen kolmion $\triangle ABC$ ortokeskus ja G sen painopiste, ja olkoon $AB \neq AC$. Suora AG leikkaa kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirrettyä ympyrää pisteissä A ja P . Olkoon P' pisteen P peilikuva suoran BC suhteen. Osoita, että $\angle CAB = 60^\circ$ jos ja vain jos $HG = GP'$.