П'ятниця, 17 квітня, 2015 р.

Задача 4. З'ясуйте, чи існує нескінченна послідовність натуральних чисел $a_1, a_2, a_3, ...$ така, що для довільного натурального n справджується рівність

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}.$$

Задача 5. Нехай m та n — натуральні числа, причому $m > 1$. Настя розбиває множину чисел $1, 2, ..., 2m$ на m пар. Після цього Софійка обирає по одному числу із кожної пари і обчислює суму всіх обраних чисел. Доведіть, що Настя може вказати пари так, що Софійка не зможе отримати суму рівну n.

Задача 6. Нехай H — ортоцентр, а G — центроїд гострокутного трикутника ABC ($AB \neq AC$). Пряма AG перетинає описане коло трикутника ABC у точках A та P. Нехай точка P' симетрична точці P відносно прямої BC. Доведіть, що $\angle CAB = 60^\circ$ тоді і лише тоді коли $HG = GP'$.

Час: 4 години 30 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів