

2015年4月17日 金曜日

問題 4. 正の整数からなる無限列  $a_1, a_2, a_3, \dots$  であり, 任意の正の整数  $n$  について

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

をみたすものは存在するか.

問題 5.  $m, n$  は正の整数であり,  $m > 1$  をみたしている. アナスタシアは整数  $1, 2, \dots, 2m$  を  $m$  個のペアに分割し, そのあとボリスは各ペアから 1 個ずつ整数を選び, その総和を求める. このとき, アナスタシアはうまく分割をすることで, ボリスが総和を  $n$  にできないようにすることができることを示せ.

問題 6.  $ABC$  を  $AB \neq AC$  なる鋭角三角形とする. 三角形  $ABC$  の垂心を  $H$ , 重心を  $G$  とする. 直線  $AG$  と三角形  $ABC$  の外接円の交点のうち  $A$  でない方を  $P$  とし, 直線  $BC$  について  $P$  と対称な点を  $P'$  とする. このとき,  $\angle CAB = 60^\circ$  と  $HG = GP'$  が同値であることを示せ.

ただし,  $XY$  で線分  $XY$  の長さを表すものとする.