Vendredi 17 avril 2015

Problème 4. Déterminer s'il existe une suite infinie $a_1, a_2, a_3, \ldots$ d'entiers strictement positifs satisfaisant l'égalité

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

pour tout entier strictement positif n.

Problème 5. Soient m et n deux entiers strictement positifs avec $m > 1$. Anastasia partitionne les entiers $1, 2, \ldots, 2m$ en m paires. Ensuite, Boris choisit un entier dans chaque paire et calcule la somme de ces entiers choisis. Prouver qu'Anastasia peut sélectionner les paires de telle sorte que Boris ne puisse pas obtenir une somme égale à n.

Problème 6. Soient H l'orthocentre et G le centre de gravité d'un triangle acutangle ABC avec $AB \neq AC$. La droite AG coupe le cercle circonscrit à ABC en A et P. Soit P' le symétrique de P par rapport à BC. Démontrer que $\widehat{CAB} = 60^\circ$ si et seulement si $HG = GP'$.

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points