Perjantai 17. huhtikuuta 2015

Tehtävä 4. Selvitä onko olemassa ääretöntä jonoa $a_1, a_2, a_3, \ldots$ positiivisia kokonaislukuja, jolle kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n pätee yhtälö

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}.$$

Tehtävä 5. Olkoot m ja n positiivisia kokonaislukuja, joille $m > 1$. Anastasia osittaa kokonaisluvut $1, 2, \ldots, 2m$ kaikkiaan m pariksi. Sitten Boris valitsee yhden kokonaisluvun jokaisesta parista ja laskee valitsemiensa kokonaislukujen summan. Osoita, että Anastasia voi valita parit niin, että Borisin saama summa ei voi olla tasan n.

Tehtävä 6. Olkoon H teräväkärkisen kolmion $\triangle ABC$ ortokeskus ja G sen painopiste, ja olkoon $AB \neq AC$. Suora AG leikkaa kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirrettyä ympyrää pisteissä A ja P. Olkoon P' pisteen P peilikuva suoran BC suhteen. Osoita, että $\angle CAB = 60°$ jos ja vain jos $HG = GP'$.

Aikaa 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen