

4. حدد إذا ما وجد عدد غير منتهي من المتتابعة  $a_1, a_2, a_3, \dots$  من الأعداد الصحيحة الطبيعية المخالفة للصفر بحيث تحقق المساواة:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

لكل عدد صحيح طبيعي  $n$  مخالف للصفر.

5. نعتبر  $m, n$  عددين صحيحين طبيعيين مخالفين للصفر بحيث  $m > 1$ . قسّمت نورا الأعداد الصحيحة  $1, 2, \dots, 2m$  إلى  $m$  من الثنائيات، بعد ذلك اختارت نزيهة عدداً صحيحاً واحداً من كل ثنائي ثم حسبت مجموع هذه الأعداد الصحيحة المختارة. أثبت أن نورا بإمكانها أن تختار الثنائيات بحيث أن نزيهة لا تستطيع أن تجعل من المجموع مساوي لـ  $n$ .

6. نعتبر  $H$  نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث  $ABC$  ذو الزوايا الحادة و  $G$  نقطة تقاطع موسطاته بحيث  $AB \neq AC$ . المستقيم  $(AG)$  يقطع الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$  في  $A$  و  $P$ . نعتبر  $P'$  هي نظيرة  $P$  بالنسبة للمستقيم  $(BC)$ . أثبت أن  $\widehat{CAB} = 60^\circ$  إذا وفقط إذا  $HG = GP'$ .

مدة الأختبار: 4 ساعات ونصف

يخصص لكل سؤال 7 نقاط