Language: **Spanish**

Day: **1**

Jueves 16 de abril de 2015

Problema 1. Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo, y sea D el pie de la altura trazada desde C. La bisectriz de $\angle ABC$ intersecta a CD en E y vuelve a intersectar al circuncírculo ω de $\triangle ADE$ en F. Si $\angle ADF = 45°$, muestra que CF es tangente a ω.

Problema 2. Una ficha de *dominó* es de 2×1 o de 1×2 cuadrados unitarios. Determina de cuántas maneras distintas se pueden acomodar exactamente n^2 fichas de dominó en un tablero de ajedrez de tamaño $2n \times 2n$ de forma que cualquier cuadrado de 2×2 contiene al menos dos cuadrados unitarios sin cubrir que están en la misma fila o en la misma columna.

Problema 3. Sean n y m enteros mayores a 1, y sean $a_1, a_2, \ldots, a_m$ enteros positivos menores o iguales a n^m. Demuestra que existen enteros positivos $b_1, b_2, \ldots, b_m$ menores o iguales a n, tales que

$$mcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m) < n,$$

donde $mcd(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ denota el máximo común divisor de $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos