



EGMO | 2015
European Girls' Mathematical Olympiad
Minsk, Belarus

Language: Russian

Day: 1

Четверг, 16 апреля, 2015

Задача 1. Пусть $\triangle ABC$ — остроугольный треугольник, а точка D — основание высоты, проведённой из вершины C . Биссектриса угла $\angle ABC$ пересекает CD в точке E , а описанную окружность ω треугольника $\triangle ADE$ вторично пересекает в точке F . Докажите, что если угол $\angle ADF = 45^\circ$, то CF является касательной к окружности ω .

Задача 2. Домино — это плитка размера 2×1 или 1×2 . Определите количество различных способов расположить ровно n^2 плиток домино без наложений на шахматной доске размера $2n \times 2n$ так, что каждый квадрат размера 2×2 содержит по крайней мере две пустых клетки, которые находятся в одной и той же строке или одном и том же столбце.

Задача 3. Пусть n, m — натуральные числа, большие 1, и пусть a_1, a_2, \dots, a_m — натуральные числа, не превосходящие n^m . Докажите, что существуют натуральные числа b_1, b_2, \dots, b_m , не превосходящие n , такие, что

$$\text{НОД}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n,$$

где $\text{НОД}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ обозначает наибольший общий делитель чисел x_1, x_2, \dots, x_m .