



EGMO | 2015
European Girls' Mathematical Olympiad
Minsk, Belarus

Language: Romanian

Day: 1

Joi, 16 aprilie 2015

Problema 1. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și D piciorul înălțimii din C . Bisectoarea unghiului $\angle ABC$ taie CD în E și taie a doua oară cercul ω circumscris triunghiului ADE în F . Dacă $\angle ADF = 45^\circ$, arătați că dreapta CF este tangentă la ω .

Problema 2. Un *domino* este o piesă 2×1 sau 1×2 . Determinați în câte feluri putem așeza, fără suprapuneri, exact n^2 dominouri pe o tablă de șah $2n \times 2n$, astfel încât orice pătrat al tablei având dimensiunile 2×2 să conțină cel puțin două pătrate-unitate neacoperite, care să fie situate pe aceeași linie sau aceeași coloană.

Problema 3. Fie n, m numere întregi mai mari ca 1 și a_1, a_2, \dots, a_m numere întregi strict pozitive, care nu depășesc n^m . Demonstrați că există numerele întregi strict pozitive b_1, b_2, \dots, b_m , care nu depășesc n , astfel încât

$$\text{c.m.m.d.c.}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n,$$

unde $\text{c.m.m.d.c.}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ desemnează cel mai mare divizor comun al numerelor x_1, x_2, \dots, x_m .

Language: Română

Timp de lucru: 4 ore și 30 de minute
Fiecare problemă valorează 7 puncte