Czwartek, 16. kwietnia 2015

Zadanie 1. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C. Dwusieczna kąta $\angle ABC$ przecina prostą CD w punkcie E, oraz przecina okrąg ω opisany na trójkącie ADE ponownie w punkcie F. Wykazać, że jeśli $\angle ADF = 45°$, to prosta CF jest styczna do okręgu ω.

Zadanie 2. *Płytką domino* nazywamy płytkę 2×1 lub 1×2. Wyznaczyć liczbę sposobów, na jaki można ustawić dokładnie n^2 płytek domino na szachownicy $2n \times 2n$ tak, by żadne dwie płytki nie pokrywały tego samego kwadratu jednostkowego oraz by w każdym kwadracie 2×2 były co najmniej 2 niepokryte kwadraty jednostkowe leżące w tym samym wierszu lub w tej samej kolumnie.

Zadanie 3. Niech n, m będą liczbami całkowitymi większymi od 1, oraz niech $a_1, a_2, \dots, a_m$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi nie większymi niż n^m. Udowodnić, że istnieją dodatnie liczby całkowite $b_1, b_2, \dots, b_m$ nie większe niż n takie, że

$$\mathrm{NWD}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n,$$

gdzie $\mathrm{NWD}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ oznacza największy wspólny dzielnik liczb $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów