Torsdag 16. april 2015

Oppgave 1. La ABC være en spissvinklet trekant, og la D være fotpunktet til høyden fra C. Halveringslinjen til vinkelen $\angle ABC$ skjærer CD i E, og møter ADE-s omsirkel ω igjen i F. Vis at hvis $\angle ADF = 45°$, så tangeres ω av CF.

Oppgave 2. En *dominobrikke* er en brikke på 2×1 eller 1×2. Bestem antall måter nøyaktig n^2 dominobrikker kan plasseres uten overlapp på et $2n \times 2n$-brett slik at ethvert 2×2-kvadrat inneholder minst to udekkede enhetskvadrater som ligger i samme rad eller samme kolonne.

Oppgave 3. La n og m være heltall større enn 1, og la $a_1, a_2, \ldots, a_m$ være positive heltall ikke større enn n^m. Vis at det finnes positive heltall $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ikke større enn n slik at

$$\gcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m) < n,$$

der $\gcd(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ betegner største felles faktor i $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng