Language: **Hungarian**

Day: **1**

EGMO | 2015
European Girls' Mathematical Olympiad
Minsk, Belarus

2015. április 16. csütörtök

1. Feladat Legyen $ABC_\triangle$ hegyesszögű háromszög, melyben a C-ből induló magasságvonal talppontját D jelöli. Az $ABC\angle$ szög belső szögfelezője a CD egyenest E pontban metszi, míg az $ADE_\triangle$ háromszög ω-val jelölt körülírt körét E és F pontokban. Igazoljuk, hogy ha $ADF\angle = 45°$, akkor a CF egyenes érinti az ω kört.

2. Feladat *Dominó*nak hívjuk a 2×1-es vagy 1×2-es téglalapot. Határozzuk meg, hányféleképpen helyezhetünk el n^2 dominót átfedés nélkül a $2n \times 2n$-es sakktáblán úgy, hogy minden 2×2-es résztáblájában legalább 2 lefedetlen, azonos sorba vagy azonos oszlopba eső mezőt tartalmazzon!

3. Feladat Legyenek n és m 1-nél nagyobb egész számok, továbbá az $a_1, a_2, \ldots, a_m$ számok n^m-nél nem nagyobb pozitív egészek. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan n-nél nem nagyobb $b_1, b_2, \ldots, b_m$ pozitív egészek, amelyek teljesítik az

$$(a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \ldots\ ,\ a_m + b_m) < n$$

egyenlőtlenséget. Az $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ kifejezés az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ számok legnagyobb közös osztóját jelöli.

Rendelkezésre álló idő: 4 és fél óra.
Minden feladat 7 pontot ér.