



EGMO | 2015
European Girls' Mathematical Olympiad
Minsk, Belarus

Language: German

Day: 1

Donnerstag, 16. April 2015

Aufgabe 1. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck und D der Höhenfusspunkt der Höhe durch C . Sei E der Schnittpunkt der Geraden CD mit der Winkelhalbierenden von $\angle ABC$. Diese Winkelhalbierende schneide den Umkreis ω des Dreiecks ADE in einem weiteren Punkt F .

Zeige: Falls $\angle ADF = 45^\circ$, so ist die Gerade CF eine Tangente von ω .

Aufgabe 2. Ein *Domino* ist ein 2×1 oder ein 1×2 Stein. Wie viele Möglichkeiten gibt es, genau n^2 Dominos überlappungsfrei auf einem $2n \times 2n$ Schachbrett anzuordnen, sodass gilt: Jedes 2×2 Quadrat besitzt mindestens zwei unbedeckte Einheitsquadrate, welche in der gleichen Spalte oder Reihe liegen.

Aufgabe 3. Seien n, m ganze Zahlen grösser als 1 und seien a_1, a_2, \dots, a_m positive ganze Zahlen kleiner gleich n^m . Zeige, dass es positive ganze Zahlen b_1, b_2, \dots, b_m kleiner gleich n gibt, sodass

$$\text{ggT}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n,$$

wobei $\text{ggT}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ den grössten gemeinsamen Teiler von x_1, x_2, \dots, x_m bezeichnet.