Jeudi 16 avril 2015

Problème 1. Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus et soit D le pied de la hauteur issue de C. La bissectrice de l'angle $\angle ABC$ coupe la droite CD en E et recoupe le cercle ω circonscrit à ADE en F. Montrer que si $\angle ADF = 45°$, alors la droite CF est tangente à ω.

Problème 2. Un *domino* est une pièce 2×1 ou 1×2. Déterminer le nombre de manières de disposer exactement n^2 dominos sans superposition sur un échiquier $2n \times 2n$ de façon à ce que chaque carré 2×2 contienne au moins deux carrés 1×1 non recouverts situés dans une même ligne ou dans une même colonne.

Problème 3. Soient n et m deux entiers strictement plus grands que 1 et soient $a_1, a_2, \ldots, a_m$ des entiers strictement positifs ne dépassant pas n^m. Démontrer qu'il existe des entiers strictement positifs $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ne dépassant pas n tels que

$$\operatorname{pgcd}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m) < n,$$

où $\operatorname{pgcd}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ désigne le plus grand commun diviseur de $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points