Donderdag 16 april 2015

Opgave 1. Zij $\triangle ABC$ een scherphoekige driehoek en zij D het voetpunt van de hoogtelijn vanuit C. De bissectrice van $\angle ABC$ snijdt CD in E en snijdt de omgeschreven cirkel ω van driehoek $\triangle ADE$ nogmaals in F. Veronderstel dat $\angle ADF = 45°$. Bewijs dat CF raakt aan ω.

Opgave 2. Een *domino* is een 2×1- of 1×2-tegel. Bepaal op hoeveel manieren precies n^2 domino's zonder overlap op een $2n \times 2n$-schaakbord kunnen worden geplaatst zodat elk 2×2-vierkant minstens twee onbedekte eenheidsvierkantjes bevat die in dezelfde rij of dezelfde kolom liggen.

Opgave 3. Laat n, m gehele getallen groter dan 1 zijn en laat $a_1, a_2, \ldots, a_m$ positieve gehele getallen niet groter dan n^m zijn. Bewijs dat er positieve gehele getallen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ niet groter dan n bestaan zodat

$$\operatorname{ggd}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m) < n,$$

waarin $\operatorname{ggd}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ staat voor de grootste gemene deler van $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard