

Четвер, 16 квітня, 2015 р.

Задача 1. Нехай D — основа висоти проведеної з вершини C гострокутного трикутника ABC . Бісектриса кута $\angle ABC$ перетинає пряму CD у точці E і вдруге перетинає описане коло ω трикутника ADE у точці F . Доведіть, що пряма CF дотикається кола ω , якщо відомо, що $\angle ADF = 45^\circ$.

Задача 2. Доміношкою назвемо прямокутник розміром 2×1 або 1×2 . Скільки існує способів розмістити n^2 доміношок (без перекриття) на дошці розміром $2n \times 2n$ так, щоб у довільному квадраті 2×2 було хоча б дві непокриті клітинки, що знаходяться в одному рядку або одному стовпчику.

Задача 3. Нехай n, m — натуральні числа більші за 1 і нехай a_1, a_2, \dots, a_m — деякі натуральні числа, що не перевищують n^m . Доведіть, що існують натуральні числа b_1, b_2, \dots, b_m , що не перевищують n , такі, що

$$\text{НСД}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n,$$

де через $\text{НСД}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ позначено найбільший спільний дільник чисел x_1, x_2, \dots, x_m .