

Četrtek, 16. april 2015

Naloga 1. Dan je ostrokotni trikotnik $\triangle ABC$, in naj bo D nožišče višine iz točke C . Simetrala kota $\angle ABC$ seka CD v točki E in očrtano krožnico ω trikotnika $\triangle ADE$ ponovno v točki F . Če je $\angle ADF = 45^\circ$, pokaži, da je CF tangenta na krožnico ω .

Naloga 2. *Domina* je ploščica velikosti 2×1 ali 1×2 . Določi na koliko načinov lahko na šahovnico velikosti $2n \times 2n$, brez prekrivanja položimo natanko n^2 domin tako, da vsak 2×2 kvadrat vsebuje vsaj dva nepokrita enotska kvadratka, ki sta v isti vrstici ali v istem stolpcu.

Naloga 3. Naj bosta n, m celi števili večji od 1, in naj bodo a_1, a_2, \dots, a_m cela števila, ki niso večja od n^m . Dokaži, da obstajajo taka cela števila b_1, b_2, \dots, b_m , ki niso večja od n , da velja

$$D(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n,$$

kjer $D(x_1, x_2, \dots, x_m)$ označuje največji skupni delitelj števil x_1, x_2, \dots, x_m .