

četvrtak, 16. april 2015.

Zadatak 1. Neka je $\triangle ABC$ oštrogli trougao, i neka je D podnožje visine iz C . Simetrala ugla $\angle ABC$ seče CD u E , i ponovo seče opisani krug ω trougla $\triangle ADE$ u F . Ako je $\angle ADF = 45^\circ$, pokazati da je CF tangenta kruga ω .

Zadatak 2. *Domina* je pločica dimenzija 2×1 ili 1×2 . Odrediti na koliko načina je moguće postaviti tačno n^2 domina bez preklapanja na $2n \times 2n$ tablu tako da svaki 2×2 kvadrat sadrži bar dva nepokrivena jedinična kvadrata koji leže u istoj vrsti ili istoj koloni.

Zadatak 3. Neka su n, m prirodni brojevi veći od 1, i neka su a_1, a_2, \dots, a_m prirodni brojevi koji nisu veći od n^m . Dokazati da postoje prirodni brojevi b_1, b_2, \dots, b_m koji nisu veći od n , tako da

$$\text{nzd}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n,$$

gde $\text{nzd}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ označava najveći zajednički delilac brojeva x_1, x_2, \dots, x_m .