Четверг, 16 апреля, 2015

Задача 1. Пусть $\triangle ABC$ — остроугольный треугольник, а точка D — основание высоты, проведённой из вершины C. Биссектриса угла $\angle ABC$ пересекает CD в точке E, а описанную окружность ω треугольника $\triangle ADE$ вторично пересекает в точке F. Докажите, что если угол $\angle ADF = 45°$, то CF является касательной к окружности ω.

Задача 2. Домино — это плитка размера 2×1 или 1×2. Определите количество различных способов расположить ровно n^2 плиток домино без наложений на шахматной доске размера $2n \times 2n$ так, что каждый квадрат размера 2×2 содержит по крайней мере две пустых клетки, которые находятся в одной и той же строке или одном и том же столбце.

Задача 3. Пусть n, m — натуральные числа, большие 1, и пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — натуральные числа, не превосходящие n^m. Докажите, что существуют натуральные числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$, не превосходящие n, такие, что

$$\text{НОД}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m) < n,$$

где $\text{НОД}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ обозначает наибольший общий делитель чисел $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Время: 4 часа и 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов