

Joi, 16 aprilie 2015

**Problema 1.** Fie  $ABC$  un triunghi ascuțitunghic și  $D$  piciorul înălțimii din  $C$ . Bisectoarea unghiului  $\angle ABC$  taie  $CD$  în  $E$  și taie a doua oară cercul  $\omega$  circumscris triunghiului  $ADE$  în  $F$ . Dacă  $\angle ADF = 45^\circ$ , arătați că dreapta  $CF$  este tangentă la  $\omega$ .

**Problema 2.** Un *domino* este o piesă  $2 \times 1$  sau  $1 \times 2$ . Determinați în câte feluri putem așeza, fără suprapuneri, exact  $n^2$  dominouri pe o tablă de șah  $2n \times 2n$ , astfel încât orice pătrat al tablei având dimensiunile  $2 \times 2$  să conțină cel puțin două pătrate-unitate neacoperite, care să fie situate pe aceeași linie sau aceeași coloană.

**Problema 3.** Fie  $n, m$  numere întregi mai mari ca 1 și  $a_1, a_2, \dots, a_m$  numere întregi strict pozitive, care nu depășesc  $n^m$ . Demonstrați că există numerele întregi strict pozitive  $b_1, b_2, \dots, b_m$ , care nu depășesc  $n$ , astfel încât

$$\text{c.m.m.d.c.}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n,$$

unde  $\text{c.m.m.d.c.}(x_1, x_2, \dots, x_m)$  desemnează cel mai mare divizor comun al numerelor  $x_1, x_2, \dots, x_m$ .