

Czwartek, 16. kwietnia 2015

Zadanie 1. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C . Dwusieczna kąta $\angle ABC$ przecina prostą CD w punkcie E , oraz przecina okrąg ω opisany na trójkącie ADE ponownie w punkcie F . Wykazać, że jeśli $\angle ADF = 45^\circ$, to prosta CF jest styczna do okręgu ω .

Zadanie 2. Płytką *domino* nazywamy płytkę 2×1 lub 1×2 . Wyznaczyć liczbę sposobów, na jaki można ustawić dokładnie n^2 płytek domino na szachownicy $2n \times 2n$ tak, by żadne dwie płytki nie pokrywały tego samego kwadratu jednostkowego oraz by w każdym kwadracie 2×2 były co najmniej 2 niepokryte kwadraty jednostkowe leżące w tym samym wierszu lub w tej samej kolumnie.

Zadanie 3. Niech n, m będą liczbami całkowitymi większymi od 1, oraz niech a_1, a_2, \dots, a_m będą dodatnimi liczbami całkowitymi nie większymi niż n^m . Udowodnić, że istnieją dodatnie liczby całkowite b_1, b_2, \dots, b_m nie większe niż n takie, że

$$\text{NWD}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n,$$

gdzie $\text{NWD}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ oznacza największy wspólny dzielnik liczb x_1, x_2, \dots, x_m .