

Torsdag 16. april 2015

Oppgave 1. La ABC være en spissvinklet trekant, og la D være fotpunktet til høyden fra C . Halveringslinjen til vinkelen $\angle ABC$ skjærer CD i E , og møter ADE -s omsirkel ω igjen i F . Vis at hvis $\angle ADF = 45^\circ$, så tangeres ω av CF .

Oppgave 2. En *dominobrikke* er en brikke på 2×1 eller 1×2 . Bestem antall måter nøyaktig n^2 dominobrikker kan plasseres uten overlapp på et $2n \times 2n$ -brett slik at ethvert 2×2 -kvadrat inneholder minst to udekkede enhetskvadrater som ligger i samme rad eller samme kolonne.

Oppgave 3. La n og m være heltall større enn 1, og la a_1, a_2, \dots, a_m være positive heltall ikke større enn n^m . Vis at det finnes positive heltall b_1, b_2, \dots, b_m ikke større enn n slik at

$$\gcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n,$$

der $\gcd(x_1, x_2, \dots, x_m)$ betegner største felles faktor i x_1, x_2, \dots, x_m .