

Четврток, 16 април, 2015

**Проблем 1.**

Нека  $\triangle ABC$  е остоаголен триаголник, и нека  $D$  е подножје на висината спуштена од темето  $C$ . Симетралата на аголот  $\angle ABC$  ја сече  $CD$  во точката  $E$ , а опишаната кружница  $\omega$  околу триаголникот  $\triangle ADE$  повторно ја сече во точката  $F$ . Ако е  $\angle ADF = 45^\circ$ , докажи дека  $CF$  е тангента кон  $\omega$ .

**Проблем 2.**

*Домино* е плочка со димензии  $2 \times 1$  или  $1 \times 2$ . Определи на колку различни начини може да се постават точно  $n^2$  домина, без преклопување, на шаховска табла со димензии  $2n \times 2n$  така што секој негов  $2 \times 2$  квадрат содржи најмалку две непокриени квадратчиња кои припаѓаат на иста редица или на иста колона.

**Проблем 3.**

Нека  $m$  и  $n$  се цели броеви поголеми од 1, и нека  $a_1, a_2, \dots, a_m$  се позитивни цели броеви кои не се поголеми од  $n^m$ . Докажи дека постојат позитивни цели броеви  $b_1, b_2, \dots, b_m$  кои не се поголеми од  $n$ , такви што

$$\text{НЗД}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n$$

(со  $\text{НЗД}(x_1, x_2, \dots, x_m)$  е означен најголемиот заеднички делител на броевите  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ).

Language: Macedonian

**Време за работа** : 4 часа и 30 минути  
Секој проблем се вреднува со 7 поени