

2015 m. balandžio 16 d., ketvirtadienis

1 uždavinys. Duotas smailusis trikampis ABC . Taškas D yra jo aukštinės, nuleistos iš viršūnės C , pagrindas. Kampas ABC pusiaukampinė kerta CD taške E , o trikampio ADE apibrėžtinį apskritimą ω – taškuose E ir F . Įrodykite, kad jei $\angle ADF = 45^\circ$, tai CF liečia ω .

2 uždavinys. *Domino kauliuku* vadinsime 2×1 arba 1×2 plytelę. Nustatykite, keliais būdais lygiai n^2 domino kauliukų galima be persidengimų padėti ant $2n \times 2n$ lentos, kad bet kuriame 2×2 kvadrato būtų bent du neuždengti vienetiniai langeliai, esantys vienoje eilutėje arba stulpelyje.

3 uždavinys. Natūralieji skaičiai n, m yra didesni už 1, o natūralieji skaičiai a_1, a_2, \dots, a_m yra ne didesni nei n^m . Įrodykite, kad egzistuoja tokie ne didesni nei n natūralieji skaičiai b_1, b_2, \dots, b_m , kad

$$\text{DBD}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n.$$

Čia $\text{DBD}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ žymi skaičių x_1, x_2, \dots, x_m didžiausią bendrą daliklį.