

2015年4月16日 木曜日

問題 1. 三角形 ABC を鋭角三角形とし, C から辺 AB に下ろした垂線の足を D とする. 角 ABC の二等分線と CD の交点を E とし, 三角形 ADE の外接円を ω とおく. 角 ABC の二等分線と ω の交点のうち E でない方を F とする. $\angle ADF = 45^\circ$ であるとき, CF は ω に接することを示せ.

問題 2. 2×1 または 1×2 のタイルをドミノとよぶ. n^2 個のドミノを重ならないように $2n \times 2n$ のマス目に置く方法であり, 以下の条件をみたすものは何通りあるか:

どの 2×2 のマス目についても, 同じ行または同じ列にある 2 つのマスであってどちらもドミノで覆われていないようなものが存在する.

問題 3. n, m を 1 より大きい整数とし, a_1, a_2, \dots, a_m を n^m 以下の正の整数とする. このとき, n 以下の正の整数 b_1, b_2, \dots, b_m であり,

$$\gcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n$$

をみたすものが存在することを示せ. ただし, $\gcd(x_1, x_2, \dots, x_m)$ は x_1, x_2, \dots, x_m の最大公約数を表す.