

Giovedì, 16 aprile 2015

Problema 1. Dato un triangolo acutangolo $\triangle ABC$, sia D il piede dell'altezza uscente da C . La bisettrice dell'angolo \widehat{ABC} interseca CD in E ; detta ω la circonferenza circoscritta al triangolo $\triangle ADE$, sia F il punto in cui la retta BE interseca nuovamente ω . Mostrare che, se $\widehat{ADF} = 45^\circ$, allora la retta CF è tangente a ω .

Problema 2. Una *tessera del domino* è una tessera 2×1 o 1×2 . Determinare in quanti modi è possibile disporre esattamente n^2 tessere del domino su una scacchiera $2n \times 2n$ (senza sovrapporle) in modo che ogni quadrato 2×2 contenga almeno due caselle scoperte che appartengono alla stessa riga o colonna.

Problema 3. Siano n, m interi maggiori di 1 e siano a_1, a_2, \dots, a_m interi positivi, ciascuno minore o uguale a n^m . Mostrare che esistono m interi positivi b_1, b_2, \dots, b_m , ciascuno minore o uguale a n , tali che

$$\text{MCD}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n,$$

dove $\text{MCD}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ denota il massimo comun divisore di x_1, x_2, \dots, x_m .