

Donnerstag, 16. April 2015

**Aufgabe 1.** Sei  $ABC$  ein spitzwinkliges Dreieck und  $D$  der Höhenfusspunkt der Höhe durch  $C$ . Sei  $E$  der Schnittpunkt der Geraden  $CD$  mit der Winkelhalbierenden von  $\angle ABC$ . Diese Winkelhalbierende schneide den Umkreis  $\omega$  des Dreiecks  $ADE$  in einem weiteren Punkt  $F$ .

Zeige: Falls  $\angle ADF = 45^\circ$ , so ist die Gerade  $CF$  eine Tangente von  $\omega$ .

**Aufgabe 2.** Ein *Domino* ist ein  $2 \times 1$  oder ein  $1 \times 2$  Stein. Wie viele Möglichkeiten gibt es, genau  $n^2$  Dominos überlappungsfrei auf einem  $2n \times 2n$  Schachbrett anzuordnen, sodass gilt: Jedes  $2 \times 2$  Quadrat besitzt mindestens zwei unbedeckte Einheitsquadrate, welche in der gleichen Spalte oder Reihe liegen.

**Aufgabe 3.** Seien  $n, m$  ganze Zahlen grösser als 1 und seien  $a_1, a_2, \dots, a_m$  positive ganze Zahlen kleiner gleich  $n^m$ . Zeige, dass es positive ganze Zahlen  $b_1, b_2, \dots, b_m$  kleiner gleich  $n$  gibt, sodass

$$\text{ggT}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n,$$

wobei  $\text{ggT}(x_1, x_2, \dots, x_m)$  den grössten gemeinsamen Teiler von  $x_1, x_2, \dots, x_m$  bezeichnet.