

Jeudi 16 avril 2015

**Problème 1.** Soit  $ABC$  un triangle acutangle et soit  $D$  le pied de la hauteur issue de  $C$ . La bissectrice de l'angle  $\widehat{ABC}$  coupe la droite  $CD$  en  $E$  et recoupe le cercle  $\omega$  circonscrit à  $ADE$  en  $F$ . Montrer que si  $\widehat{ADF} = 45^\circ$ , alors la droite  $CF$  est tangente à  $\omega$ .

**Problème 2.** Un *domino* est une pièce  $2 \times 1$  ou  $1 \times 2$ . Déterminer le nombre de manières de disposer exactement  $n^2$  dominos sans superposition sur un échiquier  $2n \times 2n$  de façon à ce que chaque carré  $2 \times 2$  contienne au moins deux carrés  $1 \times 1$  non recouverts situés dans une même ligne ou dans une même colonne.

**Problème 3.** Soient  $n$  et  $m$  deux entiers strictement plus grands que 1 et soient  $a_1, a_2, \dots, a_m$  des entiers strictement positifs ne dépassant pas  $n^m$ . Démontrer qu'il existe des entiers strictement positifs  $b_1, b_2, \dots, b_m$  ne dépassant pas  $n$  tels que

$$\text{pgcd}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n,$$

où  $\text{pgcd}(x_1, x_2, \dots, x_m)$  désigne le plus grand commun diviseur de  $x_1, x_2, \dots, x_m$ .