

Torstai 16. huhtikuuta 2015

Tehtävä 1. Olkoon $\triangle ABC$ teräväkulmainen kolmio, ja olkoon sen pisteestä C piirretyn korkeusjanan kantapiste D . Kulman $\angle ABC$ puolittaja leikkaa suoraa CD pisteessä E ja kolmion $\triangle ADE$ ympäröityä ympyrää ω pisteessä F . Jos $\angle ADF = 45^\circ$, niin osoita, että CF sivuaa ympyrää ω .

Tehtävä 2. *Domino* on 2×1 - tai 1×2 -laatta. Selvitä kuinka monella eri tavalla n^2 dominoa voi asettaa $2n \times 2n$ -shakkilaudalle ilman päällekkäisyyksiä niin, että jokainen 2×2 -neliö sisältää ainakin kaksi peittämätöntä ruutua, jotka ovat samalla rivillä tai samalla sarakkeella.

Tehtävä 3. Olkoot n ja m kokonaislukuja ja suurempia kuin 1, ja olkoot a_1, a_2, \dots, a_m positiivisia kokonaislukuja, jotka eivät ole isompia kuin n^m . Osoita, että on olemassa positiiviset kokonaisluvut b_1, b_2, \dots, b_m , jotka eivät ole isompia kuin n , ja joille

$$\text{sy}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n,$$

missä $\text{sy}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ tarkoittaa lukujen x_1, x_2, \dots, x_m suurinta yhteistä tekijää.