

Donderdag 16 april 2015

Opgave 1. Zij $\triangle ABC$ een scherphoekige driehoek en zij D het voetpunt van de hoogtelijn vanuit C . De bissectrice van $\angle ABC$ snijdt CD in E en snijdt de omschreven cirkel ω van driehoek $\triangle ADE$ nogmaals in F . Veronderstel dat $\angle ADF = 45^\circ$. Bewijs dat CF raakt aan ω .

Opgave 2. Een *domino* is een 2×1 - of 1×2 -tegel. Bepaal op hoeveel manieren precies n^2 domino's zonder overlap op een $2n \times 2n$ -schaakbord kunnen worden geplaatst zodat elk 2×2 -vierkant minstens twee onbedekte eenheidsvierkantjes bevat die in dezelfde rij of dezelfde kolom liggen.

Opgave 3. Laat n, m gehele getallen groter dan 1 zijn en laat a_1, a_2, \dots, a_m positieve gehele getallen niet groter dan n^m zijn. Bewijs dat er positieve gehele getallen b_1, b_2, \dots, b_m niet groter dan n bestaan zodat

$$\text{ggd}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n,$$

waarin $\text{ggd}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ staat voor de grootste gemene deler van x_1, x_2, \dots, x_m .