Четвъртък, 16 Април, 2015

Задача 1. В остроъгълен $\triangle ABC$ точка D е петата на височината от върха C. Ъглополовящата на $\angle ABC$ пресича CD в точка E и описаната окръжност ω около $\triangle ADE$ за втори път в точка F. Ако $\angle ADF = 45^\circ$, да се докаже, че CF е допирателна към ω.

Задача 2. Домино е 2×1 или 1×2 плочка. Да се определи по колко различни начина n^2 домина могат да се разположат без припокриване на $2n\times 2n$ шахматна дъска така, че всеки 2×2 квадрат да съдържа поне две непокрити единични квадратчета, които са в един ред или един стълб.

Задача 3. Нека n, m са цели числа, по-големи от 1, и нека $a_1, a_2, \ldots, a_m$ са естествени числа не по-големи от n^m. Да се докаже, че съществуват естествени числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ не по-големи от n, за които

$$\text{НОД}(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_m+b_m) < n,$$

където НОД$(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ означава най-големия общ делител на числата $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки