

1. نعتبر المثلث  $ABC$  حاد الزوايا ، ونعتبر  $D$  هو طرف الارتفاع الصادر من  $C$ .  
منصف الزاوية  $\widehat{ABC}$  يتقاطع مع  $(CD)$  في  $E$  ويتقاطع مع الدائرة  $\omega$  المحيطة بالمثلث  $ADE$   
مرة أخرى في  $F$ . إذا كانت  $\widehat{ADF} = 45^\circ$  أثبت أن  $(CF)$  مماس للدائرة  $\omega$ .
2. قطعة دومينو هي قطعة  $1 \times 2$  أو  $2 \times 1$ . أحسب بكم طريقة نستطيع أن نضع  $n^2$  دومينو  
بالضبط بدون تراكم جزئين من قطعتين فوق بعضهما في لوح شطرنج  $2n \times 2n$  بحيث يحتوي  
كل مربع  $2 \times 2$  على الأقل على مربعين  $1 \times 1$  غير مغطيين ينتميان لنفس الصف أو العمود.
3. نعتبر  $m, n$  عددين صحيحين أكبر من 1 و نعتبر  $a_1, a_2, \dots, a_m$  أعداداً صحيحةً طبيعية  
مخالفة للصفر أصغر أو مساوية لـ  $n^m$ . أثبت أنه يوجد أعداداً صحيحة طبيعية مخالفة للصفر  
 $b_1, b_2, \dots, b_m$  أصغر أو مساوية لـ  $n$  بحيث:  

$$\text{pgcd}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n,$$
بحيث  $\text{pgcd}(x_1, x_2, \dots, x_m)$  ترمز إلى القاسم المشترك الأكبر للأعداد  $x_1, x_2, \dots, x_m$ .

مدة الاختبار: 4 ساعات ونصف

يخصص لكل سؤال 7 نقاط