

1. نعتبر المثلث ABC حاد الزوايا ، ونعتبر D هو طرف الارتفاع الصادر من C .
منصف الزاوية $\angle ABC$ يتقاطع مع CD في E ويتقاطع مع الدائرة ω المحيطة بالمثلث ADE
مرة أخرى في F . إذا كانت $\angle ADF = 45^\circ$ أثبت أن CF مماس للدائرة ω .

2. قطعة دومينو هي قطعة 1×2 أو 2×1 . أحسب بكم طريقة نستطيع أن نضع n^2 دومينو بالضبط بدون تراكب جزئين من قطعتين فوق بعضهما في لوح شطرنج $2n \times 2n$ بحيث يحتوي كل مربع 2×2 على الأقل على مربعين 1×1 غير مغطيين ينتميان لنفس الصف أو العمود.

3. نعتبر m, n عددين صحيحين أكبر من 1 و نعتبر a_1, a_2, \dots, a_m أعداداً صحيحة موجبة ليست أكبر من n^m . أثبت أنه يوجد أعداداً صحيحة موجبة b_1, b_2, \dots, b_m ليست أكبر من n بحيث:

$$\gcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n,$$

بحيث $\gcd(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ترمز إلى القاسم المشترك الأكبر للأعداد x_1, x_2, \dots, x_m .

زمن الاختبار: 4 ساعات ونصف

يخصص لكل سؤال 7 درجات