EGMO | 2014
European Girls' Mathematical Olympiad
Antalya · Turkey

2014. április 13., vasárnap

4. Feladat. Határozzuk meg az összes $n \geq 2$ egész számot, melyhez léteznek olyan $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ egészek, amelyekre bármely $0 < i < n$, $0 < j < n$, $i \neq j$ esetén teljesül, hogy ha n osztja $2i + j$-t, akkor $x_i < x_j$.

5. Feladat. Legyen n egy pozitív egész. Van n darab, kavicsokat tartalmazó dobozunk, melyek között lehet üres is. Minden egyes lépésben kiválaszthatunk egy dobozt, amelyből kiveszünk két kavicsot. Az egyiket eldobjuk, a másikat egy általunk választott másik dobozba áttesszük. A kavicsok egy kezdeti eloszlását *megoldható*-nak nevezzük, ha véges sok (esetleg nulla) lépéssel elérhető, hogy ne legyen üres doboz. Határozzuk meg az olyan eredeti kavics–eloszlásokat, melyek nem megoldhatóak, de bármely dobozhoz még egy kavicsot hozzáadva megoldhatóvá válnak.

6. Feladat. Határozzuk meg az összes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre

$$f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) = (y + f(x))(x + f(y))$$

teljesül minden valós x-re és y-ra.

Rendelkezésre álló idő: 4 és fél óra
Minden feladat 7 pontot ér