Language: **Spanish**

Day: **2**

Domingo 13 de avril de 2014

Problema 4. Encuentra todos los enteros $n \geq 2$ para los cuales existen enteros $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ que satisfacen la siguiente condición: si $0 < i < n$, $0 < j < n$ con $i \neq j$ y $2i + j$ divisible entre n, entonces $x_i < x_j$.

Problema 5. Sea n un entero positivo. Se tienen n cajas y cada caja contiene un número no negativo de fichas. Un movimiento consiste en tomar dos fichas de una de las cajas, dejar una fuera de las cajas y poner la otra en otra caja. Decimos que una configuración de fichas es *resoluble* si es posible aplicar un número finito de movimientos (que puede ser igual a cero) para obtener una configuración en la que no haya cajas vacías. Determinar todas las configuraciones iniciales de fichas que no son resolubles y se vuelven resolubles al agregar una ficha en cualquiera de las cajas (sin importar en cual caja se pone la ficha).

Problema 6. Determina todas las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la siguiente condición

$$f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) = (y + f(x))(x + f(y))$$

para todos x y y números reales.

Duración del examen: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos